УДК 517.911.5

© *О. В. Филиппова*

СВОЙСТВА АППРОКСИМИРУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ И ВНУТРЕННИМИ И ВНЕШНИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ[1]

В работе исследованы дифференциальные включения с внешними и внутренними возмущениями и импульсными воздействиями. Сформулировано определение приближенного решения (δ-решения) дифференциального включения с импульсными воздействиями.

Ключевые слова: дифференциальные включения с импульсными воздействиями, аппроксимирующее отображение, радиус внутренних и внешних возмущений, δ-решение.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное пространство с нормой $|\cdot|$, $\operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых компактов пространства $\mathbb{R}^n$. X — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Обозначим $B_X[x,\varepsilon]$ — замкнутый шар пространства X с центром в точке $x \in X$ и радиусом $\varepsilon > 0$. Пусть $U \subset X$, тогда $\overline{U}$ — замыкание множества U; $h^+_X[U_1;U] \equiv \sup\limits_{x\in U_1} \rho_X[x,U]$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества $U_1 \subset X$ от множества U в пространстве X; $h_X[U_1;U] = \max\{h^+[U_1;U]; h^+[U;U_1]\}$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве X. Пусть $\mathcal{U} \in [a,b]$ — измеримое по Лебегу множество. Обозначим $L^n(\mathcal{U})$ пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{L^n(\mathcal{U})} = \int\limits_{\mathcal{U}} |x(s)|ds$.

Пусть $t_k \in [a,b]$ $(a < t_1 < \ldots < t_m < b)$ — конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{C}^n[a,b]$ множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$ ограниченных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k = 1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}$.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) \in F(t,x(t)), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$\Delta(x(t_k)) = I_k(x(t_k)),\ k = 1,\ldots,m, \tag{2}$$

$$x(a) = x_0, \tag{3}$$

отображение $F : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Отображения $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,\ldots,m$, непрерывны, $\Delta(x(t_k)) = x(t_k+0) - x(t_k)$, $k = 1,2,\ldots,m$.

Под *решением задачи* (1)–(3) будем понимать функцию $x \in \widetilde{C}^n[a,b]$, для которой существует такое $q \in \mathbf{L}^n[a,b]$, что при почти всех $t \in [a,b]$ выполняется включение $q(t) \in F(t,x(t))$, и при всех $t \in [a,b]$ имеет место представление

$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s)ds + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k,b]}(t)\Delta(x(t_k)),$$

где $\Delta(x(t_k))$, $k = 1,2,\ldots,m$, удовлетворяют равенствам (2) .

Обозначим через $K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ множество всех функций $\eta\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, обладающих следующими свойствами:

1) при каждых $(x,\delta) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ функция $\eta(\cdot,x,\delta)$ измерима;

2) при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $\delta \in [0,\infty)$ функция $\eta(t,\cdot,\delta)$ непрерывна;

3) для каждых $U \in \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta \in [0,\infty)$ существует такая суммируемая функция $m_{U,\delta}\colon [a,b] \to [0,\infty)$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in U$ и $\tau \in [0,\delta]$ выполняется неравенство $\eta(t,x,\tau) \leqslant m_{U,\delta}(t)$;

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 11–01–00645), Министерства образования и науки РФ (проект № 1.1877.2011, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы»).

4) при почти всех $t \in [a,b]$ и каждого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются равенства $\lim_{\substack{z \to x \\ \delta \to 0+0}} \eta(t,z,\delta) = 0$, $\eta(t,x,0) = 0$.

Заменим в определении множества $K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ условие 3 на более сильное требование, в котором функция $m_{U,\delta}(\cdot)$ есть константа. Соответствующее этому требованию подмножество множества $K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ обозначим через $\widetilde{K}([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$.

Будем говорить, что многозначное отображение $\widetilde{F}\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *аппроксимирует* отображение $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, если найдется такая функция $\xi(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $(x,\delta) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ выполняется оценка $h[F(t,x), \widetilde{F}(t,x,\delta)] \leqslant \xi(t,x,\delta)$. Отображение $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *аппроксимирующим отображение* $F(\cdot,\cdot)$ или просто аппроксимирующим.

Если функция $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ в каждой точке $(t,x) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $\delta \in [0,\infty)$ определяет погрешность вычисления значений аппроксимирующего отображения $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$, то функцию $\eta(\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *радиусом внешних возмущений аппроксимирующего отображения* $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$.

Пусть $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. По функции $\xi(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, определим функцию $\xi(\eta_0)\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ равенством $\xi(\eta_0)(t,x,\delta) = \sup_{z \in B[x,\eta_0(t,x,\delta)]} \xi(t,z,\delta)$. Функция $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ в каждой точке $(t,x(t)) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $\delta \in [0,\infty)$ задает погрешность вычисления значения решения $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ в точке $t \in [a,b]$ дифференциального включения (1) , причем эти погрешности могут быть неравномерны относительно фазовой переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Далее, функцию $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot)$ будем называть *радиусом внутренних возмущений аппроксимирующего отображения* $\widetilde{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$.

Пусть $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Рассмотрим отображение $Q_{\eta_0\eta}\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$, определенное равенством

$$Q_{\eta_0\eta}(t,x,\delta) = (\widetilde{F}(t, B_{\mathbb{R}^n}[x,\eta_0(t,x,\delta)],\delta))^{\eta(t,x,\delta)}. \tag{4}$$

При этом для каждых функций $\eta_0(\cdot,\cdot,\cdot) \in \widetilde{K}([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ и $\eta(\cdot,\cdot,\cdot) \in K([a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство $\lim\limits_{\delta \to 0+0} h[F(t,x), Q_{\eta_0\eta}(t,x,\delta)] = 0$.

Рассмотрим при каждом фиксированном $\delta \in [0,\infty)$ дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in Q_{\eta_0\eta}(t,x(t),\delta), \quad t \in [a,b], \tag{5}$$

где отображение $Q_{\eta_0\eta}\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ определенно равенством (4) .

Дифференциальное включение (5) будем называть *аппроксимирующим дифференциальное включение* (1) *с внутренними и внешними возмущениями*. Каждое решение включения (5) с импульсными воздействиями (2) и начальным условием (3) при фиксированном $\delta > 0$ будем называть δ*-решением* (*приближенным решением*) *включения* (1) (см. [1]).

В докладе исследованы асимптотические свойства включения (5).

Список литературы

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 15.02.2012

O. V. Filippova

Properties of approximating differential inclusions with impulses and with internal and external perturbations

In this paper the differential inclusions with impulses and with internal and external perturbations are investigated. The concept of approximate solution for a differential inclusions with impulses are represented.

Keywords: differential inclusions with impulses, approximated operator, radius of internal and external perturbations, δ-solution.

Mathematical Subject Classifications: 47N20

Филиппова Ольга Викторовна, ассистент, кафедра алгебры и геометрии, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, 392000, Россия, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33. E-mail: philippova.olga@rambler.ru

Filippova Ol'ga Viktorovna, Assistant Lecturer, Department of Algebra and Geometry, Tambov State University, ul. Internatsional'naya, 33, Tambov, 392000, Russia